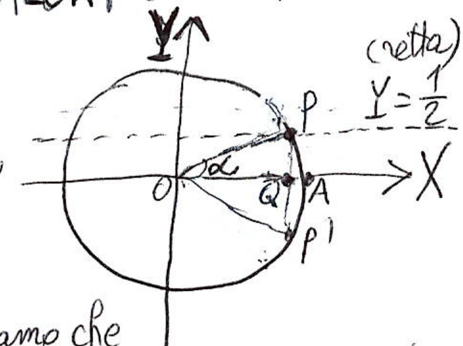
IMPORTANTISSIMO IN TRIGONOMETRIA!

Spesso, negli esercizi di trigonometria, si usa il fatto che
$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\,\frac{\pi}{6} = tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\,\frac{\pi}{4} = tg\,45° = cotg\,\frac{\pi}{4} = cotg\,45° = 1$,
$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $tg\,\frac{\pi}{3} = tg\,60° = \sqrt{3}$ (quindi $cotg\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $cotg\,\pi/3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$)
e nello studio delle (dis)equazioni trigonometriche si fa spesso un discorso di tal genere: "il valore $\frac{1}{2}$ è assunto dalla funzione seno dall'angolo di $\frac{\pi}{6}$ o $30°$". Nel materiale didattico del corso di Laurea in Farmacia (v. parte 1) i risultati sopra enunciati sono provati. Ora, lo scopo di queste note è provare il <u>VICEVERSA</u> senza "leggere" (o imparare a memoria) le tabelle, cioè: se un angolo α del <u>PRIMO QUADRANTE</u> è tale che $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, allora $\alpha = 30°$ $(= \frac{\pi}{6})$, supponendo di NON CONOSCERE A PRIORI I VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICI A $30°$, $45°$, $60°$.



1) Cominciamo col provare che: se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{2}}$, allora $\underline{\alpha = 30°}$.
Disegniamo la circonferenza goniometrica, e consideriamo le coordinate X ed Y. Ricordiamo che $X = \cos\alpha$, $Y = \sin\alpha$, e che l'equazione della circonferenza goniometrica è $X^2 + Y^2 = 1$ (perché è la circonferenza di centro l'origine $(0,0)$ e raggio 1). Allora $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ vuol dire $Y = \frac{1}{2}$, cioè $\overline{QP} = \frac{1}{2}$. Sia ora P' il punto simmetrico di P rispetto all'asse X, come in figura; allora, per simmetria, si ha $\overline{P'P} = 1$, mentre $\overline{OP} = \overline{OP'} = 1$ (sono 2 raggi della circonferenza goniometrica). Allora il triangolo OPP' è equilatero, perché ha tutti i 3 lati uguali (misurano 1); e quindi i suoi angoli sono tutti quanti di $60°$. In particolare, $P\hat{O}P' = 60°$ e, per simmetria, $\boxed{\alpha} = P\hat{O}Q = \boxed{30°}$.

2) Proviamo ora che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, allora $\underline{\alpha = 30°}$.

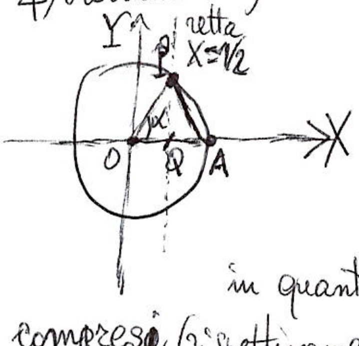
Come si procede? $\frac{\sqrt{3}}{2}$ potrebbe essere un po' "complicatino" da trattare.

Ricordiamo che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (identità fondamentale, che nelle coordinate X ed Y si scrive $Y^2+X^2=1$, cioè L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA) e che α sta nel 1° Quadrante, dove IL SENO E IL COSENO SONO ENTRAMBI POSITIVI. Allora da $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ricava $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, da cui $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, e quindi $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ (perché α è nel 1° Quadrante e quindi prendiamo il valore positivo). Da ciò usiamo il risultato del punto 1) e otteniamo $\boxed{\alpha = 30°}$.

3) Proviamo che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, allora $\underline{\alpha = 30°}$.

Notiamo che $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Y}{X}$ ($Y = \sin\alpha, X = \cos\alpha$). Ma $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{Y}{X}$, da cui $X = \sqrt{3}\,Y$. Ma $X^2+Y^2=1$ (circonferenza goniometrica, o $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, identità fondamentale). Allora $X^2 = 3Y^2$, ma $Y^2 = 1-X^2$, quindi $X^2 = 3(1-X^2)$, cioè $X^2 = 3-3X^2$, $4X^2=3$, $X^2 = \frac{3}{4}$, $X = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ossia $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (si prende il valore positivo perché α è nel 1° Quadrante, e dunque il coseno è positivo). Da ciò e dal punto 2) si ottiene $\underline{\alpha = 30°}$.

4) Proviamo che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, allora $\alpha = 60°$.



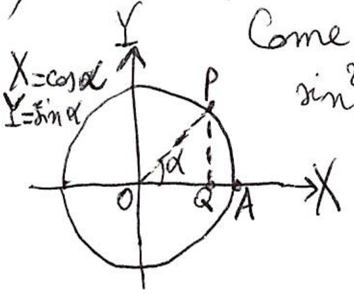
Analogamente come nel punto 1), si ha: $X = \frac{1}{2}$, quindi $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$, ma anche $\overline{QA} = \frac{1}{2}$ (dato che $\overline{OA} = 1$, raggio della circonferenza goniometrica). Allora i triangoli POQ e PQA sono congruenti (per il 1° criterio di congruenza, in quanto hanno uguali il lato PQ (comune), i lati OQ e QA, e gli angoli compresi (rispettivamente $O\hat{Q}P$ e $P\hat{Q}A$, che sono retti). In particolare $\overline{AP} = \overline{OP} = 1$ (raggio della circonferenza goniometrica), ed anche $\overline{OA} = 1$. Allora il triangolo OPA è equilatero, e quindi tutti i suoi 3 angoli misurano 60°. In particolare, $\alpha = P\hat{O}Q = 60°$, come volevamo dimostrare.

5) Proviamo ora che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, allora $\underline{\alpha = 60^\circ}$.

Procedendo come nel punto 2), ricordiamo che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e che α sta sul 1° Quadrante, dove sia il seno sia il coseno sono positivi. Allora da $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$, quindi $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, da cui $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ (prendiamo il valore positivo). Da ciò e dal punto 4) si ottiene $\alpha = 60^\circ$.

6) Proviamo che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $tg\,\alpha = \sqrt{3}$, allora $\underline{\underline{\alpha = 60^\circ}}$.
Notiamo che $Y = \sin\alpha$, $X = \cos\alpha$, quindi $\sqrt{3} = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Y}{X}$, da cui $Y = \sqrt{3}\,X$, e dunque $Y^2 = 3X^2$. Ma $X^2 + Y^2 = 1$ (circonferenza goniometrica, o $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, identità fondamentale), da cui $X^2 = 1 - Y^2$, quindi $Y^2 = 3(1 - Y^2) = 3 - 3Y^2$, da cui $4Y^2 = 3$, $Y^2 = \frac{3}{4}$, $Y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (si prende il valore positivo perché α sta sul 1° Quadrante, dove il seno è positivo). Da ciò e dal punto 5) si ottiene $\underline{\alpha = 60^\circ}$.

7) Proviamo che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$.



Come "sistemiamo" $\frac{1}{\sqrt{2}}$? Usiamo l'identità fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Se $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, da cui $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (si prende il valore positivo, perché α è sul 1° Quadrante). Allora $\sin\alpha = \cos\alpha \left(= \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, cioè $Y = X$, ossia $\overline{QP} = \overline{OQ}$, quindi il triangolo OPQ è RETTANGOLO ISOSCELE. Allora gli angoli $\alpha = P\hat{O}Q$ e $O\hat{P}Q$ sono uguali, e quindi $\alpha + \alpha + 90^\circ (= P\hat{Q}O) = 180^\circ$, cioè $2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$, $2\alpha = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, quindi $\boxed{\alpha = 45^\circ}$.

In modo analogo, usando sempre l'identità $\underline{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$, si ottiene che:

$\boxed{8)}$ Se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$.

9) Proviamo che, se α è un angolo del 1° Quadrante tale che $tg\,\alpha = 1$, allora $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$.
Si ha: $1 = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, quindi $\cos\alpha = \sin\alpha$, cioè $X = Y$, ossia $\overline{OQ} = \overline{QP}$. Procedendo come nel caso 7), si ottiene che il triangolo OPQ è rettangolo isoscele, ed $\underline{\alpha = 45^\circ}$.